第１回講義「離散構造１」

[1] 授業の目標，概要，進め方

[2] 授業計画

[3] 集合論（１）

・集合と要素，普遍集合と空集合

・部分集合，ベン図，集合演算

授業の目標

計算機科学の基礎にある離散系数学の考え方とその適用法を体系的に学ぶことをテーマとし,

① 記号，式，図表，および論理的思考に慣れる。

② 現実問題の抽象化・一般化という考え方に慣れる。

③ プログラミングとの関わりを理解する。

を到達目標とする。特に，数学的議論を通じて,明確な概念による論理表現の重要性を理解する。

授業の概要

1. まず，集合論の基礎から入り，次に関数ないし写像，さらに関係について学ぶ。続いて，計算機科学の重要なツールである組合せ解析ないし数え上げ法について学ぶ。さらに，数学的議論に欠かせない論理の基本となる命題論理および述語論理を学ぶ。最後に，鳩の巣原理や数学的帰納法など定義と証明の各種技法を紹介する。
2. 授業後半では，理解の定着を図るため，多くの演習問題を解く。なお，毎回，復習および予習課題を課す。
3. 6月中旬に認定試験（Mastery Test）を実施する。

授業計画

	内容
第1回	集合論（1） --- 集合と要素，普遍集合と空集合，部分集合，ベン図，集合演算
第2回	集合論（2） --- 集合代数と双対性，集合の類，べき集合，論証とベン図
第3回	関数（1） --- 定義域と値域，関数のグラフ，関数の合成
第4回	関数（2）--- 1対1の関数，上への関数，逆関数，関数と集合
第5回	関係（1） --- 関係の定義と同一性，関係の合成，関係の性質
第6回	関係（2） --- 同値関係と分割，順序関係と整列
第7回	組合せ解析 --- 数え上げ技法（和の法則，積の法則，包除原理），順列と組合せ
第8回	命題論理（1） --- 命題論理式と論理結合子，命題の解釈と論理演算，真理表
第9回	命題論理（2） --- 命題代数，論理同値と論理含意，恒真式と証明系
第10回	述語論理 --- 述語と限量子，述語論理の性質
第11回	定義と証明 --- 背理法，鳩の巣原理，数学的帰納法と証明，帰納的・再帰的定義
第12回	演習（1） --- 集合と関数についての演習
第13回	演習（2） --- 関係と組合せ解析についての演習
第14回	演習（3） --- 命題論理，述語論理，定義と証明についての演習
第15回	まとめ --- 学習到達度の総合的な確認ー期末試験

授業の進め方：

１．理解の定着度を細かく確認しながら進める

２．質問時間を十分に取る

授業外に行うべき学習活動：

１．復習および予習課題を確実にこなす

評価方法：

出席点　20点　　通常課題点　20点

期末試験　60点

テキスト:

[1] S. Lipschutz 著，成嶋 弘 監訳：マグロウヒル大学演習「離散数学ーコンピュータサイエンスの基礎数学ー」，オーム社，1995年.

講義ノート:

授業支援システムの教材にupload

Discrete_Structures1_1.pdf, …

集合論(1)

集合(set)とは素朴には「もの」の集まりである。その集合において「もの」は要素(element)もしくは元と呼ばれる。

【定義1.1(集合)】 要素の集まりを集合と呼ぶ。

集合Aに属する要素の数をAの要素数といい，$n(A)$もしくは$|A|$と表す。要素数が有限である集合は有限集合と呼び，無限である集合は無限集合と呼ぶ。

【定義1.2(要素数)】 有限集合Aの要素数は$n(A)$と表す。

ex. 空集合ϕの要素数は0，すなわち，$n(\phi)=0$ である。

Q1. 有限集合と無限集合の例を挙げなさい。

集合の例：

・自然数$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$　0を含む非負整数とする

・整数$\mathbf{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

・偶数$\mathbf{E}=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$　・奇数$\mathbf{O}=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

・有理数$\mathbf{Q}$　・実数$\mathbf{R}$　・複素数$\mathbf{C}$

・ブール集合$\mathbf{B}=\{0, 1\}$

集合が与えられると，その集合に属する「もの」が定まる。

【定義1.3（属する）】 集合Aにaが属するとき$a \in A$と表し，属さないとき$a \notin A$と表す。ex. $2 \in \mathbf{N}$であり，$2.8 \notin \mathbf{N}$である。

Q2. 有理数$\mathbf{Q}$に属するものと属さないものの例を示せ。

集合の外延的定義と内包的定義:

外延的定義では集合を構成している要素を書き並べて{と}で囲むことにより集合を定める。

ex. サイコロの目の集合＝{1, 2, 3, 4, 5, 6}

内包的定義では要素が集合に属するための条件を書き並べることにより集合を定める。

ex. 偶数$\mathbf{E} = \{n : n \in \mathbf{N},\ n$は2の倍数$\}$ または

偶数$\mathbf{E} = \{n \in \mathbf{N} : n$は2の倍数$\}$

Q3. 有理数**Q**の内包的定義を示しなさい。

集合の同一性と部分集合：

集合{1,2,3}, {2,3,1}, {3,2,1}は等しい。2つの集合はどのような場合に等しいあるいは異なると呼ばれるのだろうか。

【定義1.4（部分集合）】 任意の集合AとBに対し，$a \in A$であるならば $a \in B$であることが任意の $a \in A$ に対して成り立つとき，AはBの部分集合であると呼ばれ $A \subseteq B$ と表す。

【定理1.1（部分集合の性質）】

(i)　任意の集合Aに対し，$\phi \subseteq A$ である。

(ii)　任意の集合Aに対し，$A \subseteq A$ である。

(iii)　$A \subseteq B$ であり，かつ $B \subseteq C$ であるならば，$A \subseteq C$ である。

集合の同一性と部分集合(続き):

【定義1.5(集合の同一性)】 任意の集合AとBは, $A \subseteq B$ であり, かつ$B \subseteq A$ であるとき, 等しいと呼ばれ $A=B$ と表す。

【定義1.6(真部分集合)】 任意の集合AとBに対し, $A \subseteq B$ であり, かつ $A \neq B$ であるとき, AはBの真部分集合であると呼ばれ $A \subset B$ と表す。

Q4. 空集合はただ1つ存在する, ことを示しなさい。

集合の有用性:

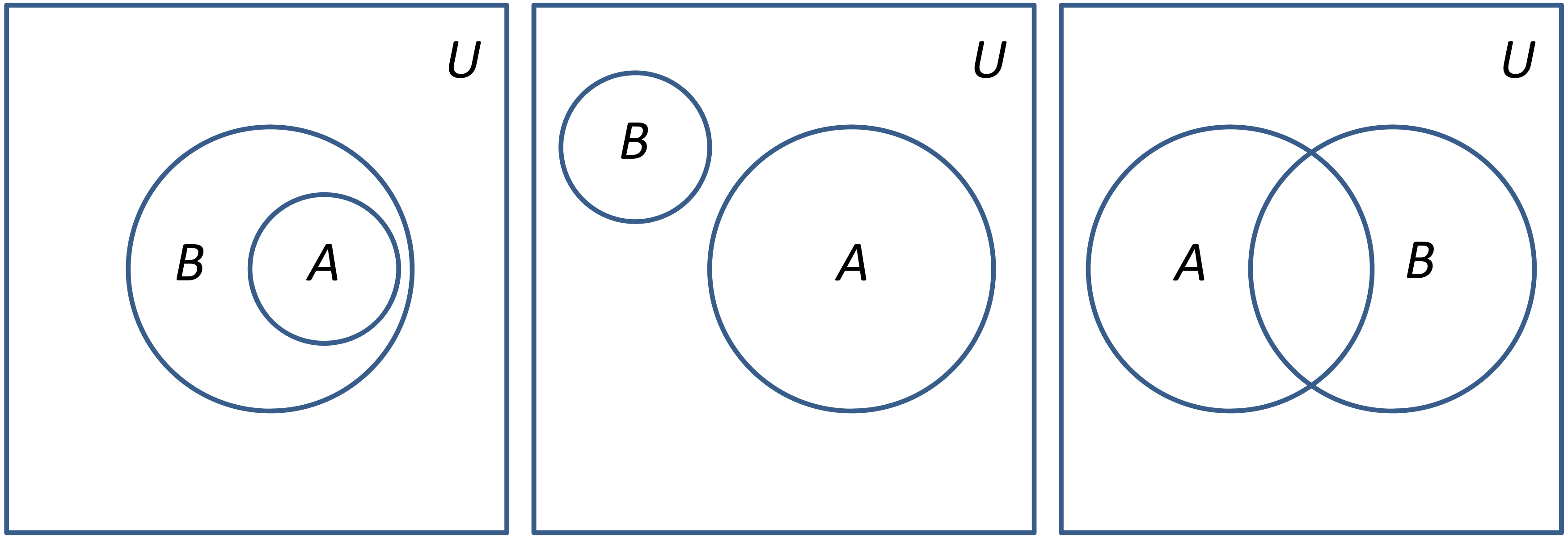
[1] バラバラのものを集めて1つの対象としてとらえたい
場面でどこでも適用できる。

[2] 簡単な集合から複雑な集合を作ることができる。
⇒集合から集合を作る仕組みとして，集合に対する
基本的な演算がある。

その理解のために，平面上の点の集合によって集合を図的に表す「ベン図」を用いる。

cf. John Venn (1834-1923) イギリスの論理学者

ベン図の例



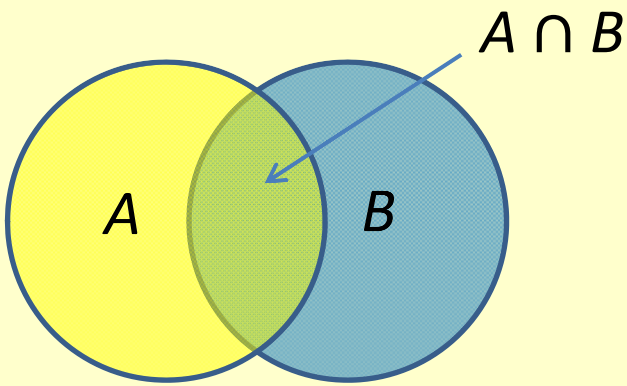
$A \subset B$　　A と B は互いに素　　一般的な A と B

U : 普遍集合(universal set)もしくは全体集合であり，考察中のすべての集合の要素全体からなる，固定された大きな集合を表す。　cf. 空集合φ

共通部分(∩)

２つの集合の共通部分からなる集合を共通部分集合(intersection)もしくは積集合と呼ぶ。

【定義1.7(共通部分)】 任意の集合 A と B に対し, A と B の共通部分集合 $A \cap B$ を $A \cap B = \{c : c \in A, c \in B\}$ とする。



Q5. A={1, 2}, B={2, 3}とすると$A \cap B$={ ? }である。

共通部分集合の例を生物から拾ってみる。

哺乳類の集合をAとし卵生動物の集合をBとすると，

AとBの共通部分集合$A \cap B$は単孔類（カモノハシやハリモグラ）の集合となる。

２つの集合の両方に属する要素が存在しないこともある。

集合Aと集合Bに対して，AとBの両方に属する要素が存在しない場合，すなわち，$A \cap B = \phi$であるとき，AとBは互いに素(disjoint)であるという。

「∩」は2つの集合から新たな集合を生成する演算である。

共通部分集合の定義より以下の定理が成り立つ。

【定理1.2（空集合との共通部分集合）】

任意の集合 A に対し，$A \cap \phi = \phi \cap A = \phi$ である。

【定理1.3（共通部分集合のべき等律）】

任意の集合 A に対し，$A \cap A = A$ である。

【定理1.4（共通部分集合の交換律）】

任意の集合 A と B に対し，$A \cap B = B \cap A$ である。

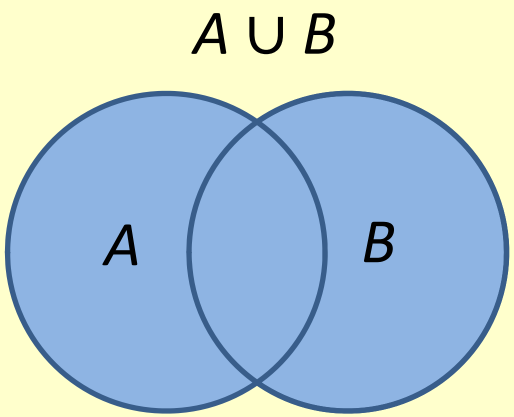
【定理1.5（共通部分集合の結合律）】

任意の集合 A, B, C に対し，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ である。

和(∪)

２つの集合の全体からなる集合を和集合(union)と呼ぶ。

【定義1.8(和)】 任意の集合 A と B に対し, A と B の和集合 $A \cup B$ を $A \cup B = \{c : c \in A$ または $c \in B\}$ とする。



Q6. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ とすると $A \cup B = \{\ ?\ \}$ である。

「∪」も２つの集合から新たな集合を生成する演算である。

和集合の定義より以下の定理が成り立つ。

【定理1.6（空集合との和集合）】

任意の集合 A に対し，$A \cup \phi = \phi \cup A = A$ である。

【定理1.7（和集合のべき等律）】

任意の集合 A に対し，$A \cup A = A$ である。

【定理1.8（和集合の交換律）】

任意の集合 A と B に対し，$A \cup B = B \cup A$ である。

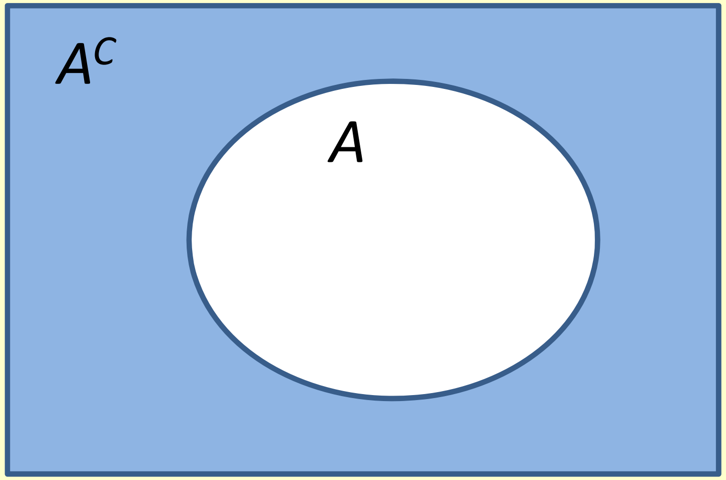
【定理1.9（和集合の結合律）】

任意の集合 A, B, C に対し，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ である。

補(^{C})

ある集合に対しその集合に属さない要素からなる集合を補集合(complement)と呼ぶ。普遍集合の部分集合に対して定義される。

【定義1.9(補)】 任意の普遍集合 U と U の任意の部分集合 A に対し, A の補集合 A^C を $A^C = \{c : c \in U, c \notin A\}$ とする。



【定理1.10(補集合の性質)】

普遍集合 U と U の任意の部分集合 A に対し

$\phi^C = U,\ U^C = \phi,\ A \cup A^C = A^C \cup A = U, A \cap A^C = A^C \cap A = \phi,$

$(A^C)^C = A$ である。

集合 A と A の補集合 A^C は互いに素であり, 集合 A の補集合 A^C の補集合 $(A^C)^C$ は A となる。

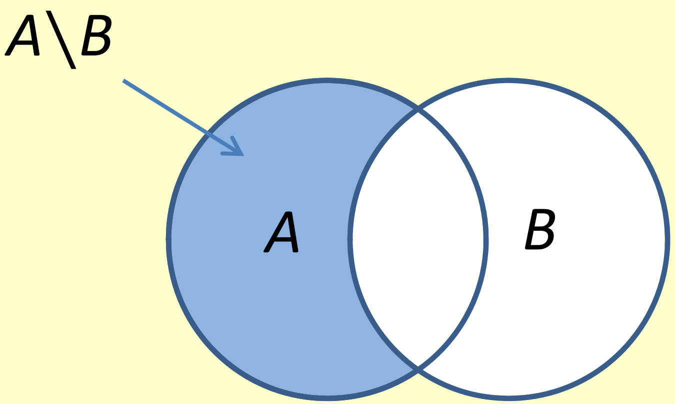
Q7. 有理数の集合**Q**の補集合は何か。

Q8. 普遍集合と補集合の例を挙げなさい。

差(\)

2つの集合の一方の集合から他方の集合の要素を取り除いた集合を差集合(difference)と呼ぶ。

【定義1.9(差)】 任意の集合 A と B に対し, A と B の差集合 $A \backslash B$ を $A \backslash B = \{c : c \in A, c \notin B\}$ とする。



Q9. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ とする。$A \backslash B = \{\ ?\ \}$, $B \backslash A = \{\ ?\ \}$ である。

【定理1.11（差集合の性質）】

任意の集合 A に対し，$A \backslash \phi = A$, $\phi \backslash A = \phi$, $A \backslash A = \phi$ である。

集合 A と集合 B に対して，$A \backslash B$ と $B \backslash A$ は一般に異なり，差集合演算 $\backslash$ では交換律や結合律は成り立たない。

Q10. $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$, $C=\{1, 3\}$ とする。このとき

$A \backslash (B \backslash C)=\{\ ?\ \}$ であり $(A \backslash B) \backslash C =\{\ ?\ \}$ である。

第1回講義課題

【復習課題】

問題1．次の集合のうち，どれとどれが等しいか：

$\{r, t\}, \{t, r\}, \{r, t, r, s\}, \{r, t, s\}, \{s, t, r, s\}, \{t, s, t, r\}, \{s, r, s, t\}.$

問題2．普遍集合$U=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$とし，$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$, $C=\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $D=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $E=\{2, 4, 6, 8\}$, $F=\{1, 5, 9\}$とする．次の各集合を求めよ：

(a) $A \cap (B \cup E)$
(b) $(A \backslash E)^C$
(c) $(A \cap D) \backslash B$
(d) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$
(e) $(C \cup E) \backslash (B \cap D)$

第1回講義課題(続き)

【予習課題】(教科書 pp. 8-9)

問題1. ある集合 A が与えられたとき，集合 A のべき集合の定義を述べなさい。

問題2. 集合 $A=\{b, a, c, k\}$ とする。このとき，集合 A のべき集合を求めなさい。

課題の提出要領

【提出方法】

・A4用紙に手書きもしくはMS Wordで作成

・複数枚の場合はホッチキス止め

・第１頁の冒頭に

離散構造１　第〇回課題レポート

提出年月日　2014年△月□日

学籍番号　　氏名

を必ず記す

【提出期限】

・次回講義の冒頭，遅刻は認めず